ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

NGUYỄN KHÁNH LY

MỘT SỐ QUỸ TÍCH LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH COHEN-MACAULAY

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

——————o0o——————

NGUYỄN KHÁNH LY

MỘT SỐ QUỸ TÍCH LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH COHEN-MACAULAY

Ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 8 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:
TS. Nguyễn Thị Kiều Nga

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không bị trùng lặp với các đề tài khác. Mọi sự trích dẫn để hoàn thành luận văn này đã được chỉ rõ nguồn gốc. Nếu có gì sai sót tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2019

Tác giả

Nguyễn Khánh Ly

Xác nhận	Xác nhận
của trưởng khoa chuyên môn	của cán bộ hướng dẫn khoa học

TS. Nguyễn Thị Kiều Nga

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và hỗ trợ tận tình của **TS. Nguyễn Thị Kiều Nga**. Em xin được gửi đến cô sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc về sự tận tâm của cô đối với bản thân trong suốt thời gian làm luận văn.

Em cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Ban chủ nhiệm khoa Toán và các thầy cô giáo khoa Toán trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm, giúp đỡ, tạo mọi điều kiện để em hoàn thành luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy em rất mong nhận được sự quan tâm, góp ý của các quý thầy cô và các bạn để khóa luận của em được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng, em xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè những người đã giúp đỡ và hỗ trợ em trong suốt thời gian học tập và hoàn thành khóa luận của mình.

Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2019

Tác giả

Nguyễn Khánh Ly

Mục lục

Lời nói đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$, M là R-môđun hữu hạn sinh với chiều Krull $\dim M = d$. Ta luôn có bất đẳng thức $\operatorname{depth} M \leqslant \dim M$. Nếu $\operatorname{depth} M = \dim M$ thì môđun M gọi là *môđun Cohen-Macaulay*. Lớp môđun Cohen-Macaulay có vai trò rất quan trọng trong Đại số giao hoán và xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học như: Đại số đồng điều, Hình học đại số, Lý thuyết tổ hợp, Lý thuyết bất biến,...

Nhiều mở rộng của môđun Cohen-Macaulay được các nhà khoa học trong và ngoài nước giới thiệu, quan tâm nghiên cứu như môđun Cohen-Macaulay suy rộng, môđun Cohen-Macaulay dãy, môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy, môđun giả Cohen-Macaulay, giả Cohen-Macaulay suy rộng, môđun Cohen-Macaulay chính tắc, môđun Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc,... Quỹ tích không Cohen-Macaulay của M kí hiệu là $\mathrm{nCM}(M)$ là tập gồm các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R sao cho $M_{\mathfrak{p}}$ không là Cohen-Macaulay. Quỹ tích không Cohen-Macaulay đã được R. Hartshorne nghiên cứu từ năm 1966. Ông chỉ ra rằng, trong trường hợp vành cơ sở R là thương của vành Gorenstein thì $\mathrm{nCM}(M)$ là tập đóng theo tôpô Zariski. Một số kết quả về chiều của $\mathrm{nCM}(M)$ được đưa ra bởi N. T. Cường trong [6].

Năm 2002, M. Brodmann và R. Y. Sharp [4] đã giới thiệu khái niệm giả giá khi nghiên cứu về chiều và số bội của môđun đối đồng điều địa phương. Cho $i \geqslant 0$ là một số nguyên, giả giá thứ i của M, kí hiệu là $\operatorname{Psupp}^i_R(M)$ được cho bởi công thức

$$\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0 \right\}.$$

Năm 2010, N. T. Cường, L. T. Nhàn và N. T. K. Nga [12] đã sử dụng tập giả giá để mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay của M là

$$\mathrm{nCM}(M) = \bigcup_{0\leq i<j\leq d} (\mathrm{Psupp}^i_R(M) \bigcap \mathrm{Psupp}^j_R(M)).$$

Hơn nữa, nếu R là catenary và M đẳng chiều thì

$$\mathrm{nCM}(M) = \bigcup_{i=0}^{d-1} \mathrm{Psupp}^i_R(M).$$

Quỹ tích không Cohen-Macaulay suy rộng của M kí hiệu $\mathrm{nGCM}(M)$ là tập hợp tất cả các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R sao cho $M_\mathfrak{p}$ không là Cohen-Macaulay suy rộng. Để nghiên cứu quỹ tích này, L. T. Nhàn, N. T. K. Nga và P. H. Khánh [20] đã giới thiệu khái niệm giá suy rộng. Giá suy rộng thứ i của M, kí hiệu là $\mathrm{Lsupp}^i_R(M)$ được cho bởi công thức

$$\mathrm{Lsupp}^i_R(M) = \left\{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \ell_{R_\mathfrak{p}}(H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}})(M_\mathfrak{p}) = \infty \right\}.$$

Sử dụng giá suy rộng, họ đã mô tả quỹ tích không Cohen-Macaulay của M là

$$\mathrm{nGCM}(M) = \bigcup_{1\leq i<j<d} (\mathrm{Lsupp}^i_R(M) \bigcap \mathrm{Lsupp}^j_R(M)).$$

Đặc biệt, nếu M đẳng chiều và R là catenary thì

$$\mathrm{nGCM}(M) = \bigcup_{1\leq i<d} \mathrm{Lsupp}^i_R(M).$$

Tính đóng của các quỹ tích $\mathrm{nCM}(M)$, $\mathrm{nGCM}(M)$, mối quan hệ của các quỹ tích này với tính không trộn lẫn của vành, kiểu đa thức của M,...cũng được các tác giả nghiên cứu. Trong những năm gần đây vấn đề quỹ tích của các môđun liên quan đến tính Cohen-Macaulay vẫn được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu như N. T. Cường, Đ. T. Cường, L. T. Nhàn, T. N. An, C. Rotthaus, L. M. Sega,...

Mục tiêu của luận văn này là trình bày lại các kết quả gần đây của L. T. Nhàn, N. T. K. Nga, P. H. Khánh trong các bài báo [20], [21] về tập giả giá, giá suy rộng và một số quỹ tích liên quan đến tính Cohen-Macaulay như: quỹ tích giả Cohen-Macaulay, quỹ tích giả Cohen-Macaulay suy rộng, quỹ tích không Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc. Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung luận văn được trình bày trong hai chương:

Chương 1: Trình bày các kết quả về môđun đối đồng điều địa phương, tính catenary của vành, biểu diễn thứ cấp của môđun, môđun Cohen-Macaulay và môđun Cohen-Macaulay suy rộng.

Chương 2: Là chương chính của luận văn. Trình bày và chứng minh chi tiết lại một số kết quả về tập giả giá, giá suy rộng và một số quỹ tích liên quan đến tính Cohen-Macaulay như: quỹ tích giả Cohen-Macaulay, giả Cohen-Macaulay suy rộng, quỹ tích không Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc. Các quỹ tích trên được mô tả qua các tập giả giá, giá suy rộng của các môđun thương [Định lý 2.3.7], [Định lý 2.4.5], [Mệnh đề 2.5.6]. Đồng thời tính ổn định với phép tổng quát hóa, tính đóng của các quỹ tích cũng được quan tâm nghiên cứu.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức đã biết nhằm thuận tiện cho việc theo dõi các chương sau như: môđun đối đồng điều địa phương, tính catenary của vành, biểu diễn thứ cấp của môđun, môđun Cohen-Macaulay và môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Trong suốt chương này, ta luôn kí hiệu $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$, I là iđêan của R và $\mathrm{Var}(I)$ là tập các iđêan nguyên tố của R chứa I.

1.1 Môđun đối đồng điều địa phương

Lý thuyết đối đồng điều địa phương được giới thiệu đầu tiên bởi A. Grothendieck vào những năm 1960 (xem [13]), sau đó được quan tâm nghiên cứu bởi rất nhiều nhà toán học trên thế giới như R. Hartshorne, M. Brodmann, J. Rotman, C. Huneke... Lý thuyết đối đồng điều địa phương đã có những ứng dụng to lớn trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Ngày nay nó trở thành công cụ không thể thiếu trong Đại số giao hoán, Hình học Giải tích, Hình học- Đại số,... Trong mục này, chúng tôi nhắc lại định nghĩa và một số tính chất của môđun đối đồng điều địa phương theo [3].

Định nghĩa 1.1.1. Cho M là R-môđun. Môđun đối đồng điều địa phương thứ i của M ứng với iđêan I, ký hiệu $H^i_I(M)$, được định nghĩa là môđun dẫn xuất phải thứ i của hàm tử I-xoắn $\Gamma_I(-)$, tức là

$$H^i_I(M) = \mathcal{R}^i(\Gamma_I(M)),$$

trong đó $\Gamma_I(M) = \cup_{n \geqslant 0}(0 :_N I^n)$ và được gọi là môđun con I-xoắn của M.

Chú ý rằng, nếu $f : R \to R'$ là một đồng cấu vành và N' là R'-môđun thì N' có cấu trúc R-môđun cảm sinh bởi f, trong đó phép nhân vô hướng của phần tử $r \in R$ với phần tử $m \in N'$ là $f(r)m$.

Sau đây là một số tính chất quan trọng của môđun đối đồng điều địa phương thường được dùng trong các chứng minh về sau. Định lý sau đây chỉ ra rằng môđun đối đồng điều địa phương không phụ thuộc vào vành cơ sở.

Định lý 1.1.2. (Xem [3], Định lý 4.2.1) (Tính độc lập với vành cơ sở). Cho R' là R- đại số và N' là R'-môđun. Cho I là iđêan của R. Khi đó với mỗi $i \geq 0$ ta có đẳng cấu $H^i_{IR'}(N') \cong H^i_I(N')$.

Khi R' là R- đại số phẳng, ta có định lý sau (xem [3], Định lý 4.3.2).

Định lý 1.1.3. (Định lý chuyển cơ sở phẳng) Cho R' là R-đại số phẳng. Khi đó ta có R'- đẳng cấu $H^i_I(M) \otimes_R R' \cong H^i_{IR'}(M \otimes_R R')$ với mọi $i \geq 0$.

Một trong các tính chất quan trọng và có nhiều ứng dụng của lý thuyết đối đồng điều địa phương là tính triệt tiêu và không triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương (xem [3, 6.12, 6.14]).

Định lý 1.1.4. (Định lý triệt tiêu và không triệt tiêu của A. Grothendieck) *Các khẳng định sau là tương đương:*

(i) Nếu $M \neq 0$ *thì* $\dim(M) = \max\left\{i \mid H^i_I(M) \neq 0\right\}$.

(ii) $H^i_I(M) = 0$ *với mọi* $i > \dim(M)$.

(iii) Nếu $M \neq 0$ *thì* $\operatorname{depth}(I, M) = \min\left\{i \mid H^i_I(M) \neq 0\right\}$.

(iv) Nếu $\dim M = d$ *và* $M \neq 0$ *thì* $H^d_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$.

Mặc dù M là môđun hữu hạn sinh nhưng nhìn chung môđun đối đồng điều địa phương không là môđun hữu hạn sinh và cũng không là môđun Artin. Định lý sau (xem [3], Định lý 7.1.3, Định lý 7.1.6) chỉ ra rằng đối đồng điều địa phương và giá cực đại hoặc tại cấp cao nhất luôn là Artin.

Định lý 1.1.5. *Giả sử* $(R, \mathfrak{m})$ *là vành địa phương và* M *là* R*-môđun hữu hạn sinh. Khi đó*

(i) $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ *là* R*-môđun Artin với mọi số tự nhiên* i.

(ii) *Nếu* $\dim M = d$ *thì* $H^d_I(M)$ *là* R*-môđun Artin với mọi iđêan* I *của* R.